INDLEDNING

Vores mål med denne opgave har ikke så meget været at præsentere en færdig metode til at styrke en "personlig matematisk forståelse". Dette er et arbejde som kun kan foregå gennem en konstant udvikling af den praktiske undervisningssituation og af ens egen rolle som matematik-lærer.
Målet med opgaven har nærmere været ud fra teoretiske overvejelser at overbevise læseren (og somme tider også os selv) om nødvendigheden af at fokusere på en personlig matematisk forståelse, uanset hvor vanskeligt det kan synes i en praksis.
De teoretiske overvejelser er dernæst begrundet i nogle praktiske erfaringer, der - indrømmet - ikke er så mange. Alligevel mener vi at kunne bruge dem til at give et fingerpeg om nogle forhold omkring organiseringen af en undervisning, der tager udgangspunkt i vores idéer.

Det indledende afsnit er en situation fra en praktikperiode januar '95 på Holme Skole, og den er taget med som en slags virkelighedsramme til en opgave, der ellers let kan fortabe sig i teoretiske idéer om matematikundervisning. Det er vores håb, at vi ved at vende tilbage til situationen kan eksemplificere nogle af vores tanker og idéer.
Af samme grund har vi valgt en undervisningssituation, vi selv syntes lykkedes i rimelig grad, men dette må endelig ikke forlede til at tro, at alle efterfølgende timer forløb ligeså "smertefrit".
Men det er vel heller ikke meningen at alt skal det?

EN TIME MED 3. A - HOLME SKOLE

3.a var lige mødt i skole igen efter jul, og de vidste godt, de skulle have praktikanter i matematiktimerne. De havde naturligvis haft alt andet i tankerne i julen, men havde nok alligevel en ide om, at situationen var lidt anderledes end normalt. Måske var "de nye" flinke og fortalte historier eller gav flødeboller? Måske skulle de lave noget de aldrig havde prøvet før? I hvert fald tog de pænt imod de nye og fandt forbløffende hurtigt deres stol og tog regnebogen frem.
Praktikanterne havde det stort set på samme måde. De havde da snakket med læreren, og havde derfor en svag idé om, hvor eleverne fagligt befandt sig, men til gengæld ingen idé om, hvordan de arbejdede. Hvad kunne fange deres interesse? Ville de have mere travlt med at kaste med viskelæder end at lytte på læreren? Kunne de arbejde sammen? osv. Praktikanterne vidste ikke rigtigt, om de skulle være glade eller ej, da regnebøgerne lå på bordet.
På forhånd havde praktikanterne leget med tanken om areallære. Havde børnene lært noget om det før? Var de måske for små? Ville de have nogen interesse i og brug af at lære om flademål på nuværende tidspunkt?? Efter en navnerunde, hvor man var kommet lidt på fortrolig fod, hoppede praktikanterne ud i det.

Hvad vidste eleverne om figurer?
De kendte trekanter, firkanter, cirkler, femkanter, tikanter.....osv. Der blev ingen rummelige figurer nævnt - det passede praktikanterne fint.

Efter en snak om halvtredskanter og millionkanter o.l. tog praktikanterne fat i *firkanter*, og skrev det på tavlen. En frivillig tegnede en kæmpe firkant, men kunne ikke helt nå, så den blev lidt skæv og manglede et hjørne. Var det så en firkant? Ikke rigtigt, der var kun tre hjørner og tre sider, men når man vidste, hvad han ville have tegnet, mente eleverne det var i orden. Dette tog praktikanterne som et tegn på, at eleverne kendte "ideen" bag x-kanter - og det passede dem jo også fint.

Eleverne blev nu bedt om 2 og 2 at finde en firkant et sted i klasseværelset, og ikke mindst bagefter fortælle resten af klassen, *hvor stor den var*. De gik straks i gang, og to ting var fælles for alle:
1) Man fandt straks linealer frem
2) Alle valgte rektangler.
Nu vidste praktikanterne igen lidt mere om elevernes erfaringer og arbejdsmetoder.

Firkanterne blev så præsenteret, og størrelserne varierede meget både på den ene og den anden måde:

- "Vores er 10 cm i alt, to en halv på hver led."
- "På den korte 21 og på den lange 29,5."
- "32 cm. i omkreds."
- "Den er 8 i areal, tror vi nok!"
- "36 - 2x12 og 2x6."
- "Først troede vi 25, men nu siger vi 20 i omkreds." osv.

Det var altså ikke så ligetil at udtrykke størrelse. Hvis man bare så på udsagnene, var det f.eks. ikke muligt at sige hvilken firkant, der havde været den største. Hvorfor havde eleverne valgt at besvare spørgsmålet om størrelsen, på den måde de havde? Praktikanterne stillede de enkelte grupper spørgsmål som:

- "Hvorfor målte I siderne?"
- "Hvorfor lagde I siderne sammen?"
- "Hvorfor var der nogen der gangede?"
- "Hvad er omkreds?"
- "Hvad betyder areal?"
- "Hvorfor skiftede I mening fra 25 til 20?"

Dette blev til en diskussion af begrebet "omkreds", og om det egnede sig til at fortælle noget om størrelse. Diskussionen blev ikke mindst levendegjort af, at to af firkanterne begge havde samme omkreds. Var de så lige store? Nogle mente ja, men de fleste syntes den ene "virkede størst".
Der var også eksemplet med gruppen, der havde ombestemt sig meget. Firkanten var et udsnit af ternene på tavlen på 5x5 (hvilket vel var ganske belejligt). Gruppen havde først talt eller udregnet, hvor mange tern den bestod af, men eftersom det meste af klassen havde snakket om omkreds, havde de ombestemt sig. Praktikanterne tegnede en lang firkant, der også rummede 25 firkanter, var den større end gruppens? Igen delte meninger.

Da dobbelttimen sluttede havde man ikke fundet et entydigt svar på, hvordan man beskriver størrelse af firkanter. Omkreds hang på en måde sammen med størrelse, men virkede ikke altid, og

så var der noget som nogen (ikke praktikanterne) kaldte "areal", og handlede om det, der kunne være "inden i", men at det ligefrem fortalte om størrelsen??
Der var med andre ord opstået endnu flere nye spørgsmål, som praktikanterne kunne gå hjem og tænke over, hvordan de kunne hjælpe klassen med at finde ud af:

- Hvornår er det smart at finde omkreds?
- Hvad er det der areal egentlig?
- Hvorfor og hvornår er det smart at tælle det inden i, og hvornår det rundt om?
- Er der overhovedet en ting, der kan siges at være udtryk for størrelsen af firkanter?

Og måske på et senere tidspunkt:
- Hvad nu hvis firkanterne er så store, at man ikke kan måle dem med linealerne?
- Hvad hvis det er trekanter og cirkler, eller sådan en figur som der var en der tegnede på tavlen?
- Kan man også måle omkredsen af en papkasse eller en fodbold, og hvad med det der er "inden i"?

Samtidig var praktikanterne dog også klar over, at spørgsmålene ikke trængte sig lige hurtigt på for alle elever, og kunne de i det hele taget huske, hvad de havde snakket om, når klassen skulle have matematik næste gang? Både arbejdsform og arbejdsområde var svær at forudsige.

MATEMATIK SOM KONSTRUKTION

En opgavetitel som "Personlig matematisk forståelse" kræver en forklaring. Først er det nødvendigt at se på, hvad matematik i det hele taget er for noget? Denne diskussion, der hurtig bliver temmelig abstrakt og filosofisk, er alt for stor til denne opgave, men alligevel er det godt at have grundproblematikken for øje. Lidt forenklet bliver spørgsmålet, man ofte støder ind i:

1) Er matematikken et færdigt logisk system, der bare ligger og venter på at blive opdaget?
eller:
2) Er matematikken en menneskelig konstruktion hvis eneste fundament er de naturlige tal?

Når spørgsmålet får vigtighed for os, skyldes det ikke mindst, at svaret får store konsekvenser i en pædagogisk praksis. Hvis matematikken som i 1) er et færdigt logisk system, en mængde sætninger, der venter på at blive overleveret til næste generation, må det pædagogiske mål være *en effektiv overlevering.* Dette har da også været den pædagogik, der har præget enhver tid, hvor en *logicistisk* tankegang var fremtrædende.
Ser man derimod som i 2) matematikken som en mental aktivitet, der består i at producere den ene konstruktion efter den anden, bliver pædagogikken derimod præget af at hjælpe konstruktøren, i dette tilfælde eleven, og *kvalitet og differentiering* vil blive nogle af nøgleordene. Derfor er det også ofte i pædagogiske kredse, at denne *konstruktivisme* har slået igennem.
Allerede i vores indledende historie vil man kunne se formuleringer som "at hjælpe eleverne til...", der vidner om, at opgaven her ingen undtagelse er. Den bygger på et konstruktivistisk grundlag,

måske bl.a. fordi vores erfaringer med den traditionelle pædagogik har vist en række huller i skolens matematikundervisning, som vi håber en konstruktivistisk tankegang kan rette op på.
Vi opfatter altså matematik som en *konstruktion*. Når vi snakker om *personlig* matematik skyldes det netop, at denne konstruktion er, og kun kan blive, et meget personligt anliggende. Matematisk viden er altså ikke en færdig pakke, og læring bliver ikke et spørgsmål om at fylde eleven med viden. En af de mest kendte konstruktivister Ernst Von Glasserfeld har påpeget to principper, der definerer et konstruktivistisk syn på viden og læring:

1. *"Viden bliver aktivt konstrueret af det erkendende subjekt, ikke passivt overtaget fra omgivelserne.*
2. *"At finde ud af" er en tilpasningsproces, der organiserer subjektets eksperimentelle verden; det er ikke en opdagelse af en uafhængig, allerede-eksisterende verden udenfor det erkendende subjekt."*
   (Mathematics, teachers and children s. 292, -vores oversættelse)

Dette syn på læring har traditionelt ikke haft den store indflydelse på den pædagogiske praksis. Måske fordi den på sin vis gør op med den forståelse af forholdet mellem menneske og omverden, som har været dominerende i de sidste hen ved 500 års filosofi, nemlig bevidsthedsfilosofiens subjekt-objekt model, der normalt tilskrives Descartes (Jens Rasmussen: "Læring samtale og organisation" s. 67). En model, der som grundantagelse har, at mennesket, subjektet, er adskilt fra tingene, det objektive. Erkendelse (og hermed også pædagogik) er dermed et spørgsmål om på den ene eller den anden måde at få subjektet til at "modtage" objektet, altså erkende omverdenen som den nu engang er.
Det modsatrettede synspunkt er, at erkendelsen er et dialektisk spil mellem subjekt og objekt, og at der ikke findes noget objekt, nogen erkendelse, før den har været i forbindelse med et subjekt. Uanset hvor god en pædagog man er, kan man altså ikke tilrettelægge selve erkendelsen, kun situationen, hvor den opstår, og det er det, undervisning må gå ud på. Det sidste kunne være en anden forklaring på den manglende pædagogiske praksis, for hvor tit er man som lærer ikke fristet til at skyde genvej og forsøge at overlevere sin egen erkendelse af tingene, fordi det er lettere og sikrere end at bygge på den erkendelse, eleverne kunne komme frem til?

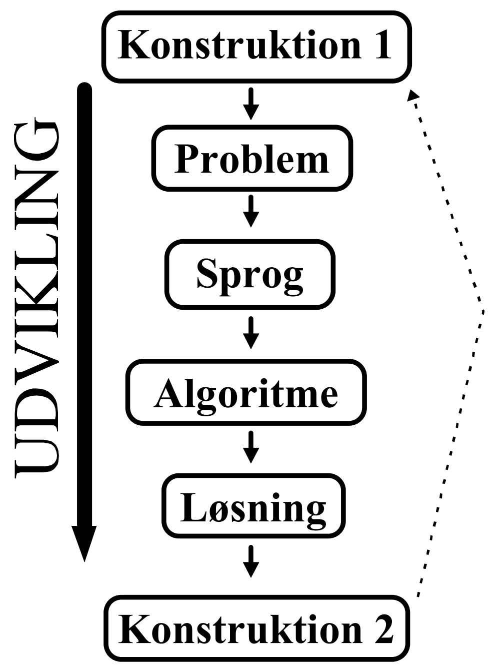
Dette er som sagt en større filosofisk diskussion, som vi springer hurtigt fra.
Vi vil dog lige nævne, at Glasserfeld i øvrigt påstår, at Piaget fortrinsvis var konstruktivist, og Glasserfeld beskriver Piagets handlingsskemaer på denne måde:

"Forholdet mellem erkendelse og omverden er således i bevægelse, fordi en hvilken som helst kognitiv struktur som regel vil gennemgå en forvandling, når det møder modstand fra omgivelserne. I forhold til organismen manifesterer omgivelserne sig kun gennem en sådan modstand. Og organismen kan kun slutte, at de "skemaer" (kognitive mønstre), der ikke har mødt modstand er levedygtige. Dette kan siges at have en biologisk parallel i, at enhver organisme, der overlever i sine omgivelser må anses for levedygtig."
(Mathematics, teachers and children s. 293, -vores oversættelse)

I eksemplet fra Holme Skole blev omkredsen, som et udtryk for størrelsen af rektangler, eksempelvis af de fleste af eleverne regnet for en anvendelig (levedygtig) metode, indtil den mødte modstand i form af et eksempel, hvor den viste sig ikke at have gyldighed. Men mere om det under overskriften "Algoritmen".

MATEMATISK UDVIKLING

På baggrund af vores konstruktivistiske syn på matematikundervisningen mener vi, at enhver udvikling starter på grundlag af en konstruktion. Bliver man stillet over for et problem, der ikke umiddelbart kan løses i kraft af denne konstruktion, er man nødt til at udvikle en ny konstruktion. Til belysning af dette har vi lavet følgende model, som skal illustrere udviklingen i forbindelse med matematik:



Model A

Modellen afspejler et udviklingsmønster, som gør sig gældende i enhver form for matematisk udvikling:

Når vi skal i gang med et givent undervisningsforløb går vi ud fra, at den enkelte elev møder op med nogle ressourcer f.eks. i form af et talbegreb på et eller andet plan. Den enkelte elev har med andre ord sin egen konstruktion. I figuren er denne konstruktion udgangspunktet for den kommende udvikling. (Konstruktion 1).

Eleven bliver så stillet overfor et matematisk problem, som skal løses. Der er her vigtigt, at man er sikker på, at det er *det rigtige problem*, eleven oplever:
Vi forestiller os f.eks. en elev i 1. klasse, der får stillet et problem, der hedder "9-2", hvor vi havde tænkt, at problemet skulle være at finde ud af, at man først har en mængde med ni elementer, så

tager man to væk, og så har man syv tilbage. Men det er jo en forudsætning, at eleven så ved at "9" betyder ni, og at "-" betyder minus, -og at dette betyder "at trække fra" osv. Eleven kan godt have et talbegreb, der er tilstrækkeligt til at løse nævnte problem, men hvis eleven ikke har *sproget* eller forståelse for/kendskab til symbolerne, så er det lige pludseligt det, der er problemet, og det var jo ikke tilsigtet.

Det er altså vigtigt, at vi arbejder med udvikling af sproget, så eleven kan gribe det egentligt tænkte problem an på den rigtige måde.
Først når eleven har et symbolsprog, der passer til problemet, kan han danne sin *algoritme*. Sprog hænger således sammen med algoritme, da man som antydet ikke kan danne en algoritme, hvis man ikke har sproget til at danne den med.

I det øjeblik eleven har dannet sin algoritme er *selve problemet* løst. Algoritmen kunne i nævnte tilfælde være følgende tankegang: "Jeg har ni og så tæller jeg to baglæns" el. "Der er to på den ene side, og de skal nå op til ni. Så går man bare opad som på en trappe" osv. Opgaven er ikke løst, men problemet er. Nu har eleven en algoritme, og så er det ikke længere et problem at løse opgaven, for man bruger bare sin algoritme. Dermed er vi nået frem til "Løsning" i figuren ovenfor.

Efter denne proces vil eleven have gennemgået en udvikling, der gør, at han nu har et nyt fundament. Han har udviklet sit sprog og har fået træning i at løse et problem. Eleven kan anskue matematik på en ny måde, -han har fået en ny konstruktion. (Konstruktion 2).
Næste gang eleven møder et problem, er det den nye konstruktion, der er fundament, så den forvandles til "Konstruktion 1" i det næste udviklingsforløb.
Problem, løsning, sprog og algoritme skal, som det forhåbentlig er fremgået, ikke ses som trin på en stige, hvor først det ene er i brug, dernæst det andet osv. I stedet er de i et konstant dialektisk forhold, hvor de er afhængige af hinanden.

PERSONLIG MATEMATIK I SKOLEN

Med denne model over "en konstruktiv matematisk udviklingsproces" i baghovedet vil vi prøve at kigge på matematikundervisning i folkeskolen og gå mere i dybden med de enkelte udviklingstrin. Hvad skal man som lærer være opmærksom på, og er der evt. principper eller metoder, man kan tage til sig?

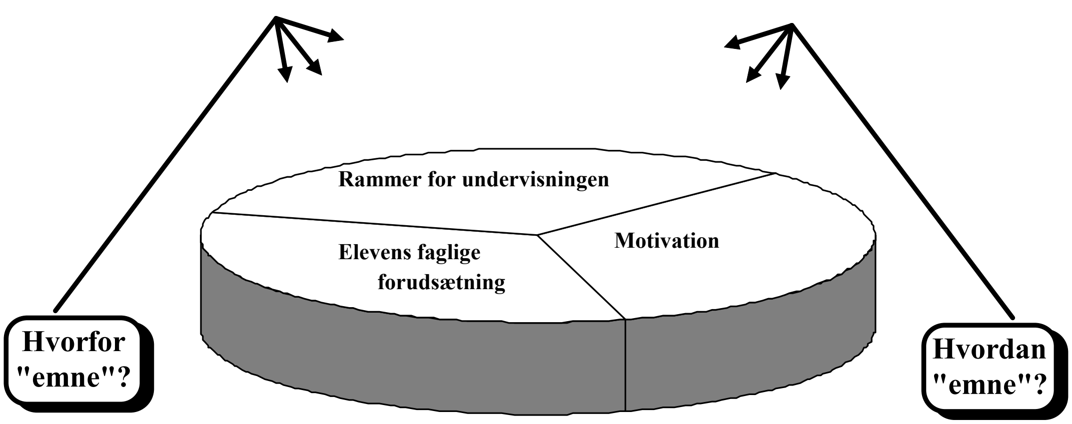
Problem/Løsning

Problem

Som udgangspunkt for enhver udvikling af den matematiske forståelse mener vi altså, at en (i dette tilfælde) elevs nuværende matematiske konstruktion står overfor et problem, der kun kan løses gennem udviklingen af en ny konstruktion. At problemet skal løses bliver dermed den primære motivation for en ny konstruktion. Ofte støder man imidlertid på ord som "emne" eller "stofområde", når man snakker om undervisningsplanlægning. Disse er efter vores opfattelse ord, der er brugt som ramme om en række problemer af samme karakter, og kan virke som en hjælp til at overskue disse. Der ligger dog en fare i, at de problemer, som skulle være genstand for individuel forundring, både af lærer og elever betragtes som en disciplin (jf. ordet areal-lære). Problemet kan så ofte få karakter af, om læreren synes man er dygtig, om man klare sig til eksamen osv., og den slags problemløsning gavner ikke den matematiske konstruktion synderligt. Men mere om det i afsnittet om algoritmer.

Hvis vi kigger på eksemplet fra Holme Skole kan vi se, at selvom det var diskussionen i klassen, der umiddelbart bragte snakken hen på arealet af firkanter, var emnet jo indirekte valgt af underviserne og vejen derind i form af problemet: *Beskrivelse af fladers størrelse.* Det første man kunne spørge om var, hvorfor netop dette emne kom på dagsordenen. Man kan sige, at der er tre faktorer, der spiller ind på et sådant valg:

1) **Rammer for undervisningen:** Dette skal dække de rammer undervisningssituationen er underlagt: Formålsparagraf, læseplaner, skolen og måske lærerens egne krav til hvordan undervisningssituationen skal forme sig (her vil vi se bort fra diskussionen om, hvorvidt omgivelsernes krav bygger på et konstruktivistisk syn på matematik).
2) **Elevernes faglige forudsætning:** Her skal begrebet forstås bredt som de kognitive rammer hos den enkelte elev (som regel en del af en "aldersgruppe"). Dette kan være fordi abstraktionsgraden af løsning til problemet generel er for høj, eller at der er andre problemer og erfaringer, der vil være gode at have som forudsætning.
3) **Motivation:** Elevernes interesse for at arbejde med de problemer, der kunne opstå. Hvis ikke emnet kan udmunde i et eller flere problemer, der på den ene eller anden måde er vedkommende, kan det være svært at få eleverne til at lege med. Her spiller desuden også samarbejdsformer og andre sociale forhold ind.



Model B

Disse tre faktorer er dels vigtige enkeltbrikker i emnevalget, men har selvfølgelig også en funktion i forhold til hinanden. Læseplanerne prøver selvfølgelig - med skiftende held - at sætte sine krav i

relation til elevernes muligheder og at anbefale metoder, som kan styrke læringssituationen. Læringssituationen afhænger også i høj grad af, om emnet matcher elevernes muligheder, og disse er igen afhængige af at blive udviklet på baggrund af gode læringssituationer.
I vores eksempel havde underviserne et for aldersgruppen obligatorisk "stof" i tankerne og desuden en fornemmelse af, at elevernes evner var til stede, ligesom motivationen for at udvikle den matematiske forståelse. Diskussionen i starten var med til at vise om denne fornemmelse holdt stik, om opgaven "Find en firkant og beskriv dens størrelse" kunne bringes på bane, og om eleverne ville gøre det til "deres problem". Model 2 bliver igen aktuel, når man skal spørge sig selv, "*hvordan*" man skal gribe undervisningen an i forhold til de tre faktorer.

Løsning
I modsætning til strukturen i Model 1 har vi valgt at beskrive punktet "Løsning" i forbindelse med "Problemet", da problemet jo er selve det, der skal have en løsning:
En del af problemløsningen er selv at definere *problemet*. Hvis problemet var defineret ville der ikke være et problem. Så ville der bare være en *opgave*. Et regnestykke som f.eks. "24 **:** 4" vil for os være en opgave. Vi har en algoritme, og den bruger vi til at finde resultatet frem med. For en elev i 3.a, der endnu ikke kender algoritmen kunne det godt være et problem. For at komme ud over symbolsprogs-problemet kunne man fortælle en regnehistorie, der passer til:
"Den anden dag var der 4, der skulle i biografen. Der var en fælles slikpose, som skulle deles ud inden filmen begyndte. I posen var der 24 stykker slik... osv. Nu er der grundlag for problemløsning. For at gøre det til et virkeligt problem burde man tilføje: "Kan I finde ud af en smart måde, der virker hver gang, der skal deles slik ud, uanset, hvor mange stykker, der er?" Der er et konkret problem, for børnene skal have lige mange stykker slik! Hvordan finder man ud af det? Hvad er løsningen på problemet? Løsningen på problemet er ikke "6 til hver". Det er bare løsningen på opgaven. Problemet er jo, "det, at finde ud af", hvordan man kan gøre.
Løsningen er med andre ord selve erkendelsen. D.v.s. at, i det øjeblik man ser den store sammenhæng, "aha... det er altså noget med, at jo flere stykker slik, der er fra starten af, jo flere bliver der til hver. Det ser sørme ud som om, at for hver gang, der er 4 stykker slik mere fra starten af, ja så er der ét stykke mere til hver, når det er delt ud." Så kan man begynde at afprøve om det nu også passer: "Når der er 24 stykker fra starten af, så er der altså 6 stykker til hver. Hvis der er 24+4=28 stykker fra starten af, ja, -så er der 6+1=7 stykker til hver." Så er problemet løst. Nu er man nået frem til en erkendelse, der handler om tals indbyrdes forhold, når man skal "dele ud." Med erkendelsen følger, at man har fået sig en ny konstruktion, (konstruktion 2).
Da man selv har defineret problemet, definerer man også selv, hvornår problemet er løst. Ovenstående ræsonnement *kunne* være en løsning på problemet. En anden vil måske mene, at problemet ikke var løst endnu, for der findes andre tal end 4 og 24. Hvad nu, hvis de var 7 i biografen, og der kun var 6 stykker slik osv.? Det er f.eks. her "konstruktion 2" for nogle kunne komme ind og bliver til en ny "konstruktion 1." Udgangspunktet/grundlaget er nu, at vi har erkendt én eller anden form for sammenhæng i forbindelse med deling af tal. Mest når det gælder 24 delt ud på 4... Nu kan vi starte forfra på et nyt problem, der kan udvide begrebet til at omfatte f.eks. alle naturlige tal under 100.
Konsekvensen af at stille åbne opgaver er, at der ikke findes en facitliste! Det er derfor ikke lærerens opgave, at sige, om det enkelte løsningsforslag er rigtigt eller forkert, men i stedet at stille spørgsmål, der kan hjælpe eleven til selv at vurdere, hvorvidt problemet er løst, og om svaret er fyldestgørende.

I 3.a var der en tendens til at matematik blev betragtet som opgaveløsning og ikke problemløsning. Dette viste sig tydeligt i elevernes idé om, at et problem ikke var løst før læreren havde sat sit flueben. Det var meget svært at overbevise nogle af eleverne om, at de selv måtte vurdere når et problem var løst. Dette understreger, at det kræver tilvænning, at køre uden facitliste.

Sproget

Sproget spiller som nævnt tidligere en meget vigtig rolle i udviklingen af en personlig matematik. Sprog skal fastholde vores tanker og kan have mange forskellige udformninger. Studier af forskellige kulturer viser, at det ofte er det forhåndenværende sprog, der ikke bare benyttes til, men også ofte kommer til at præge matematikken.

"Imidlertid har man fundet, at overalt, hvor der eksisterer et talsystem, der er værd at kaldes sådan, tæller man på fingre. I sine fingre besidder mennesket nemlig et redskab, som tillader det at gå umiddelbart fra kardinal- til ordinaltal. Ønsker det at vise, at en given mængde indeholder fire genstande, løfter eller sænker det fire fingre samtidig; ønsker det at tælle den samme mængde, løfter eller sænker det disse fingre i rækkefølge."
(Tobias Danzig: tallet, videnskabens sprog s. 21)

Fingertælling, tegninger o.l har altid fungeret som gode sprog i matematikken, og det vil stadig typisk være et sådant sprog, der falder barnet mest naturligt, at begynde med. Der er ingen grund til at undgå disse sprog, fordi de synes primitive. Man kan indvende, at det matematiske standardsprog netop har vist sig som det mest effektive, og at man derfor lige så godt kan bygge på det med det samme, men heri ligger en fare for slet ikke at få opbygget et ordentligt sprogfundament.

Vygotskys teori om sprogfunktionen er en god hjælp i forståelsen af dette.
Begreber består, mener Vygotsky, dels af *begrebsindhold*, der skal forstås som en samling af erfaringer om omgivelserne, dels *begrebsudtryk*, som er sprog i en bred betydning (altså også fingersprog, tegninger osv.).
Begrebsindhold og begrebsudtryk er i en konstant dialektisk udvikling. Erfaringerne skal fastholdes ved hjælp af sproget, og sproget skal udvikles ved nye erfaringer.
Kun hvis det dialektiske forhold har været til stede under sprogets opbygning vil det fungerer uden nogen form for oversættelse, på samme måde som dansk fungerer for danskere. Et sådant sprog er godt at tænke igennem og egner sig netop af den grund godt til problemløsning. Vygotsky kalder dette sprog et *sprog af 1. orden*.
Der findes også sprog, der ikke står i direkte forbindelse med begrebsindholdet, og som derfor kræver oversættelse og kan være sværere at tænke igennem. Det er det samme man fornemmer, når man skal udtrykke sig på fremmedsprog. De elementære vendinger sidder på rygraden, men skal man udtrykke en svær tankerække bliver sproget hurtigt utilstrækkeligt. Vygotsky betegner et sådant sprog, *sprog af 2. orden*.
Sprog af 2. orden er sværere at benytte sig af når det gælder om at løse problemer, netop fordi oversættelsen kræver meget energi.

Marit Høines hævder i "Begynner-opplæringen", at elevernes største vanskeligheder i matematiktimerne skyldes, at de for tidligt bliver presset til at problemløse med tal-symbolerne som sprog. Dette er et problem, fordi de fleste børns erfaringer med matematiske problemer fortrinsvis er

mundtlige. De kan tælle, dele ting og i det hele taget løse problemer, som de endnu ikke kan udtrykke ved hjælp af talsymboler. De fleste kan godt genkende nogle af de lette tal, men de fungerer stadig som et sprog af 2. orden, og eleverne har svært ved at tænke i det.
Et af eksemplerne Høines giver (og det er ikke et af de mest skræmmende) handler om Robert, der sagtens ved, at hvis man først får 3 klistermærker og derefter 4, så har man 7 klistermærker i alt - men opgaven: 3+4, går han i stå overfor. Høines skriver:

"Opgaven når ikke ind til egentlig behandling. Robert blokerer lige før eller i oversættelsesprocessen. Det kan hænde, at han klarer at oversætte opgaven. Det kræver så meget af ham, at han ikke magter at arbejde med den, han får ikke draget nytte af vigtige dele af sin begrebsverden. Robert får altså ikke arbejdet med det, som er det væsentlige, selve tankearbejdet, selve problemløsningen.
....Læreren får ikke et svar på papiret - måske få eller gale svar. Lærerens tolkning bliver alt for ofte: Robert forstår det ikke, han har ikke arbejdet, han kan ikke koncentrere sig , han er doven, eller han har problemer med matematik, så han må øve sig gennem mekaniske øvelser."
(Høines: Begynneropplæringen s. 82 -vores oversættelse)

Hvis det sidstnævnte (mekaniske øvelser) bliver svaret på Roberts vanskeligheder, kan man i bedste fald opøve ham til at kunne svare rigtigt på nogle stillede opgaver. Men sproget bliver tomt, og ikke i kontakt med begrebsindholdet. Det vil blive svært at bruge i forhold til problemløsningen, fordi evnen til at oversætte stadig mangler. Igen henvises til Vygotskys dialektiske forhold mellem begrebsindhold og begrebsudtryk.
Til spørgsmålet om hvad man bør gøre for at undgå sprogproblemer som Roberts skriver Høines:

"I første klasse burde vi have ladet Robert arbejde med sin talbehandling uden at skrive cifre. Motivere ham til at finde ud af hvor mange, tælle hvor mange, skrive (tegne) hvor mange...... Vi må lade ham blive sikker i de sprogformer, han har. Vi må lade ham blive bevidst om den talbehandling, som han har inden for rækkevidde.....Hjælpe ham til at opdage systemer og sammenhænge gennem brug af sprog, der fungerer som sprog af 1. orden for ham. Vi må lade ham forstå, at det er med tankerne han regner. Stregerne han sætter på papiret skal bare i første række være ham til hjælp. Det gælder egne symboler, men det gælder også senere tallene."
(Høines: Begynneropplæring, s. 84 -vores oversættelse)

Denne sidste rækkefølge -først eget sprog, dernæst det standardiserede- må være gældende for al undervisning i skolen ikke mindst begynderundervisningen. Ellers, påstår Høines, kan det nemt få indflydelse på resten af skoletidens matematik, hvor der bliver bygget videre på det overfladiske begrebsapparat, der er blevet bygget op.

I Eksemplet fra Holme Skole var underviserne usikre overfor hvilket sprog, der fungerede som sprog af 1. orden for eleverne. Derfor lagde det stillede problem ikke op til noget bestemt, der blev således ikke spurgt om: Hvor mange cm^2? Eller: hvor stort er arealet? Dette kunne have gjort opgaven sværere for de elever for hvem disse begreber ikke fungerede som sprog af 1. orden. Usikkerheden omkring især ordet "areal", men også ordet "omkreds" viste tydeligt, at der var problemer med at tyde disse ord. Hvad omkreds angik, kunne det rimelig nemt oversættes med "vejen rundt om" og det styrkede begrebsindholdet, men det var sværere med areal: "det indeni".... - for "der er jo ikke noget!"

Da eleverne var vant til at måle i centimeter, og nogen havde en forhåndsviden om noget med "at tælle tern" blev tern senere et symbol for det inden i. Men i princippet kunne man forestille sig alle mulige symboler; a4-ark, tændstikæsker, tegnetrekanter (nok lidt sværere end med rektangler eller..?) o.l. bare det kunne komme til at fungere som et sprog af 1. orden. Man ville dog hurtigt opdage behovet for at have et *fælles sprog*, hvis man udvidede problematikken til at omhandle en *sammenligning* af størrelserne.
Dette kunne så senere være indgangsvinkel til det mere formelle lærebogssprog, som jo er et fælles sprog. Ikke bare med resten af klassen, men resten af omverdenen.

Algoritmen

I 3.a blev der ikke lagt op til nogen bestemt metode til løsning af problemet, altså ingen fastlagt algoritme. Dette var meget bevidst omend lidt af et eksperiment for underviserne. At måle siderne blev hurtigt en del af de algoritmer, der kom for dagen. Dette trick vidste eleverne jo virkede med linier, så hvorfor ikke med rektangler? En linie er imidlertid ikke nok, og her kom omkredsen ind i billedet. Intuitivt må man synes at omkreds og størrelse har noget at gøre med hinanden, og algoritmen fungerede for de fleste. Der var endda nogle der ændrede deres oprindelige til fordel for denne, da de hørte den præsenteret. Efterhånden som der blev stillet spørgsmål til algoritmen, og den i et par eksempler blev spillet ud mod intuitionen, blev der dog sået en hvis tvivl om den nu også fungerede. Og en mulig anden "areal-algoritme" begyndte at spøge i kulissen. Denne var imidlertid ikke nær så umiddelbar, og det skulle vise sig at tage det meste af to uger at gøre den brugbar, -og det endda kun på nogle specielle firkanter.

Selve "algoritmen" er den opskrift, der skal bruges til at løse et givent problem. Som før nævnt har man ikke et problem længere i det øjeblik, man har fundet en algoritme. Afhængigt af problemets omfang vil algoritmen bestå af op til flere trin eller led, hvor det ene led kommer som følge af det andet.
For at tage et eksempel vil vi referere til en artikel i tidsskriftet "Matematik" (Nr. 1 1994), hvor Kjeld Fredens fortæller om de forældreløse gadebørn i Brasiliens slum: De lever bl.a. af at sælge, hvad de nu kan få fat på. Selvom de ikke har gået i skole kan de alligevel regne, når de skal sælge deres varer. Der står:

> *"-Hvor meget koster en kokosnød? (...)*
> *-35 cruzeiros...*
> *-Så vil jeg gerne have ti. Hvad bliver det?*
> *-(Pause) Tre koster 105; tre mere så er det 210. Jeg mangler fire.*
> *Det er....315...Jeg tror det er 350."*

Drengen ved, hvad én kokosnød koster. Han har sikkert tit solgt tre ad gangen, så derfor kan han huske, at tre koster 105. Det dobbelte er let nok, -altså 210. Det bliver lidt sværere, når han så skal tage portionen tre gange, men det lykkedes at nå frem til 315 for til sidst at lægge de sidste 35 til. Det er et meget godt eksempel på en *personlig algoritme*, som vidner om en forståelse af både multiplikation og addition. Vi ser straks, at det ville have været meget lettere "bare at putte et nul bagpå som vi plejer."

Det skal her nævnes, at kun 37% af børnene, der kunne udføre beregninger som disse, i en test kunne løse opgaven 105+105, når den blev præsenteret på papir, selvom de godt kendte tallene. Dette viser igen, hvor afhængig algoritmen også er af sproget.

Vi er vant til at tale om standardalgoritmer i forbindelse med de 4 regningsarter. Specielt når det gælder multiplikation og division mellem flercifrede tal. Her er algoritmen bare kogt ind til et mønster eller en række tricks, der gør det muligt "på én eller anden måde" at nå frem til et resultat. (Jvnf. ..."og så må vi låne....én i mente.." osv.). Eleven "bliver givet" et arsenal af diffuse beskeder, som man skal huske til den enkelte type opgave. Altså standardiserede algoritmer, der bliver tilegnet via udenadslære. Det viser sig hurtigt at én ting er at lære noget udenad. Noget andet er at forstå.... Ofte lærer eleven kun i bedste fald at "udfylde" selve mønsteret, men ikke hvad det er, der egentlig sker. Det viser sig f.eks. ved fejl i multiplikationsopstillinger. Vi vil her konstruere et ikke utænkeligt eksempel: Man har lært, at når man ganger et étcifret tal med et tocifret tal, så kan man skrive det op på en linje: <u>5 x 12</u>. Når man regner det ud ganger man f.eks. "énerne først" og sætter én "in mente". (5 x 2 = "0 -og én in mente").
Dernæst ganger man 10´erne (og lægger menten til) (5 x 1 = 5 (+ 1 mente) = 6), for til sidst at se, at der nu pludselig står 60 under stregen. Det gik jo nogenlunde......
Men når vi skal multiplicere to 2-cifrede tal med hinanden, kan der opstå problemer med 10´erne. Hvis vi siger 15 x 12 og går frem efter samme plan er det let at overse nogle af trickene undervejs, hvis man ikke har forstået, hvad det egentligt handler om: "Vi ganger først énerne": 5 x 2 = "0 -og én in mente" Så ganger vi 10´erne: 1 x 1 = 1 (+ 1 mente) = 2. Nu står der 20 under stregen.... (Tit giver det ikke engang anledning til bekymring, at resultatet er mindre når man ganger to 2-cifrede tal end når man ganger et étcifret tal med et 2-cifret tal).

Det er klart, at det er tidskrævende og besværligt at regne som gadebørnene i Brasilien gør det. Det er heller ikke meningen. Meningen er, at vi skal tilegne os erkendelse og forståelse af problemets løsning. Vi er nødt til at sætte sprog på, hvis vi skal erkende og forstå, og det bedste sprog i den forbindelse er et personligt sprog, der kan styrke en personlig algoritme.
Når først erkendelsen og forståelsen er der, og man via øvelse når frem til en vis rutine, vil det være hensigtsmæssigt at rationalisere sin algoritme. Det vil ofte komme af sig selv. Standardalgoritmen skal med andre ord opstå som et symbolsprog via det personlige sprog og den personlige algoritme. For drengen med kokosnødderne var det allerede automatiseret/standardiseret at tre kokosnødder kostede 105 cruzeiros.

Klassen

Organisation
Vi har nu lagt vægt på, at såvel problem/løsning, sprog og algoritme er et personligt anliggende. Man kunne derfor spørge om en klassesituation ikke bare er en forhindring for udvikling af den personlige matematiske forståelse? Det mener vi ikke behøver at være tilfældet. Man kan så diskutere om der skal være 25 elever i en klasse, men i princippet har klassen som *fælles erfaringsrum* en vigtig funktion.
Vi mener grundliggende, at den enkelte elev kan fungere i 3 forskellige læringssituationer:

- **Som en del af klassen** (Klassearbejde)
- **Som en del af en gruppe** (Gruppearbejde)
- **For sig selv** (Individuelt arbejde)

Disse læringssituationer har hver deres fordele og ulemper. Det er imidlertid ikke muligt at give et fuldstændigt bud på, i hvilke sammenhænge det ene er at foretrække frem for det andet. Det vil i høj grad være op til den enkelte lærer at skønne, hvilken af de tre nævnte muligheder, der vil gavne problemløsningen bedst.
I vores eksempel fra Holme Skole benyttede underviserne sig af et sammenspil mellem klassearbejde og gruppearbejde. Og senere i forløbet skulle det individuelle arbejde vise sig at være bedst egnet. Generelt har vores erfaringer for fordelene ved de forskellige læringssituationer været:

Klassen er god til:
- Indgangsdiskussion til elevernes møde med problemer
- Opsamling undervejs, grupperne eller de enkeltes erfaringer kan mødes
- Løbende evaluering; hvilke slags problemer har vi mødt? Hvordan kunne de tackles?
- Udvikling af et fælles sprog

Gruppen er god til:
- Idéfase, hvor den personlige algoritme kan få inspiration
- Eksperimentering, undersøgelse osv.
- Begyndende udvikling af et fælles sprog

Arbejdet **"for sig selv"** er god til:
- Videreudvikling af algoritmer
- Tankegange, hvor et fælles sprog endnu ikke er etableret
- Træning af det personlige sprog og den personlige algoritme

Noget af det allersværeste for en lærer med op til 25 elever med hver deres personlige forståelse er selvfølgelig, hele tiden at have det billede af hver enkelts matematiske konstruktion, som er nødvendig for at kunne hjælpe eleven til at udvikle denne.
En sådan tanke er for nogen så urealistisk, at de helt forkaster den, og måske satser på standardiseringen i stedet. Som vi nævnte i indledningen har vi ikke en praktisk erfaring, der gør os

i stand til at give svaret på dette problem, men en ting, der efterhånden blev tydeligt i arbejdet med 3.a var nødvendigheden af at skifte mellem de tre læringssituationer fra før.

Et eksempel kunne være, at man starter timen "fra tavlen", hvor man måske resumerer fra sidst og dernæst præsenterer eleverne for en opgave af en art. Noget, der forhåbentligt inspirerer dem til at stille sig selv et problem, de vil løse. Det er vigtigt at få klaret de ting, givet de oplysninger osv. som man kan til hele klassen, da det ellers tager tid senere i form af gentagelser, forklaringer man glemte osv.
Dernæst kan der arbejdes i grupper eller individuelt. Her har læreren muligheder for at danne sig et indtryk af de enkelte elevers matematiske konstruktion, og hjælpe dem med at udvikle den ved at stille spørgsmål, pirre til nysgerrigheden osv.
På et passende tidspunkt, måske ved timens slutning, måske når der er dannet løsningsmodeller til problemet, kan man igen etablere klasse-arbejdet.
Dette er bare et eksempel. Der kan være mange varianter.

AFRUNDING

Til sidst vil vi gøre opmærksom på, at vi mener, at de tanker omkring *personlig matematisk forståelse*, som vi har prøvet at gøre rede for, står i relation til de idéer om progressive læringssituationer, der f.eks. ligger bag de nye læseplaner for matematik:

"På mellemtrinnet er det vigtigt at eleverne opnår tillid til, at de gennem faget kan opbygge et alsidigt stykke værktøj til løsning af praktiske og teoretiske problemer......."
"I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Standardiserede regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet."

Eller i den nye folkeskolelovs enkleste beskrivelse af den nye folkeskolelovs idéer om princippet om undervisningsdifferentering :

"Skolen har til opgave at tilpasse undervisningen til eleverne, opfattet som modsætning til at tilpasse eleverne til undervisningen".

Netop denne sidste sætning kan for matematik efter vores mening ikke opfyldes uden at tage udgangspunkt i noget, der ligner det, vi her har omtalt som "personlig matematisk forståelse".

LITTERATURLISTE

Begynner-opplæringen
(Kap. 3: "Teoribakgrunn")
Marit Johnson Nøines
Caspar Forlag 1987

Læring, samtale, organisation
(Kap. 3: "Læring og socialisation i skolen")
Unge Pædagoger 1993

Mathematics, Teachers and Children
(Kap 29: Barbera Jakowski: "Constructivism and the mathematic classroom")
-edited by David Pinn
British Library 1988

Tallet, videnskabens sprog
(Kap. 1: "Fingeraftryk")
Tobias Dantzig
Gyldendal 1964

Tidsskrifet Matematik
Nr. 1 1994 (Temanummer: "Læseplaner")
Artikel af Kjeld Fredens: "Persolig matematisk forståelse"
Danmarks Matematiklærerforening